

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta + 3 \cdot \alpha \cdot \beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta + 3 \cdot \alpha \cdot \beta^2 - \beta^3$$

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta^2)$$

Παρατηρήσεις :

$$(-\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2, \quad (-\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2, \quad (-\alpha + \beta)^3 = -(\alpha - \beta)^3, \quad (-\alpha - \beta)^3 = -(\alpha + \beta)^3$$

Ασκήσεις :

Άσκηση 1 : Να αναπτύξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

1. $(x + 1)^2$

2. $(x + 2)^2$

3. $(x - 1)^2$

4. $(x - 3)^2$

5. $(2x + 1)^2$

6. $(2x - 3)^2$

7. $(2x + y)^2$

8. $(2x - 3y)^2$

9. $(2x + y)^2$

10. $(2\alpha^2\beta^3x^4 + \beta^2\gamma^3y^2)^2$

11. $(2\alpha x^2 - 4\alpha^2 y)^2$

12. $(-2x + \alpha^2)^2$

13. $(-2\alpha^3 - \beta^2)^2$

14. $(x + 1)^3$

15. $(x - 2)^3$

16. $(2x + 3y)^3$

17. $(\alpha x - \beta)^3$

18. $(-x - 1)^3$

19. $(x + 1) \cdot (x - 1)$

20. $(\alpha x + \beta) \cdot (\alpha x - \beta)$

21. $(x + 2) \cdot (2 - x)$

22. $(x + 2) \cdot (2 - x)$

23. $(\alpha^2 x^3 + \beta^4) \cdot (\alpha^2 x^3 - \beta^4)$

24. $(x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

25. $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

26. $(x + \alpha) \cdot (x^2 - \alpha x + \alpha^2)$

27. $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2$

28. $(\alpha - \frac{1}{\alpha})^3$

29. $(\alpha + \frac{1}{\alpha}) \cdot (\frac{1}{\alpha} - \alpha)$

30. $(\frac{\alpha^2 x^3}{\beta^4} - \frac{\beta x}{\alpha^2})^2$

31. $(\sqrt{2} + 1)^2$

32. $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

33. $(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

34. $(\sqrt{2} - 1)^3$

35. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

36. $(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha})^3$

Άσκηση 2 : Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

1. $(\dots + \dots)^2 = \alpha^2 + \dots + 9$
2. $(\dots + \dots)^2 = \alpha^2 - 10\alpha + \dots$
3. $(x^2 + \dots)^2 = \dots + \dots + 9$
4. $(x^2 + \dots)^2 = \dots + 4xy + \dots$
5. $(\dots - \dots)^2 = 4\alpha^2 - \dots + 3\beta^2$
6. $(\alpha - \dots) \cdot (1 + \dots) = \alpha^2 - 1$
7. $(\alpha\beta x - \dots) \cdot (1 + \dots) = \alpha^2\beta^2x^2 - 1$
8. $(3x + 4y) \cdot (4y - \dots) = \dots - 9x^2$
9. $(\dots + \dots)^3 = 8\alpha^3 + \dots + \dots + 1$
10. $(\dots - 3)^3 = 8\alpha^3 - \dots + \dots - \dots$
11. $x^3 + \dots = (x + 2) \cdot (\dots - \dots + \dots)$
12. $\dots + \dots = (\dots - \dots) \cdot (\dots - 2\alpha\beta + 4\beta^2)$

Άσκηση 3 : Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

1. $2 \cdot (\alpha + 3)^2 - 3 \cdot (\alpha - 2)^2 - (\alpha + 1) \cdot (1 - \alpha)$
2. $2 \cdot (x^2 + \alpha^2)^2 - 3 \cdot (x^2 - \alpha^2)^2 - (x + \alpha) \cdot (\alpha - x) \cdot (x^2 + \alpha^2)$
3. $x \cdot (x - 1)^2 - (1 - x)^3 - 2x \cdot (x - 1) \cdot (1 + x)$
4. $\frac{(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2) - (\alpha^2x^2 - \beta^2y^2)}{\alpha^2\beta^2x^2y^2}$
5. $\alpha \cdot (-x^3 + 1)^2 - x \cdot (-\alpha^2 - 1)^3 - \alpha x \cdot (\alpha - x) \cdot (x + \alpha)$

Άσκηση 4 : Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

1. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \cdot \beta$
2. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha \cdot \beta(\alpha + \beta)$
3. $\frac{(x + y)^2}{2} - \frac{(x - y)^2}{2} = 2xy$

4. $\frac{(x+2)^3}{4} - \frac{(x-2)^3}{4} = 3x^2 + 4$
5. $(x-1)^3 - (x+1)^3 - (1-x^2) \cdot (x^2+1) = (x^2-3)^2 - 12$
6. $(x+\alpha) \cdot (x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta) \cdot x + \alpha\beta$
7. $(x+\alpha) \cdot (x+\beta) \cdot (x+\gamma) = x^3 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) \cdot x^2 + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot x + \alpha\beta\gamma$
8. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$
9. $(x - \sqrt{2})^2 \cdot (x + \sqrt{2})^2 - (x^2 + 2)^2 + 8x^2 = 0$
10. $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

Άσκηση 5 : Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

1. Αν $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ της παράστασης: $K = 3x^2 - 7xy + 3y^2$
2. Αν $x + y = 5$ και $x \cdot y = 10$ των παραστάσεων : $A = x^2 + y^2$ και $B = x^3 + y^3$
3. Αν $x + \frac{1}{x} = 5$ των παραστάσεων : $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $B = x^3 + \frac{1}{x^3}$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1^η περίπτωση: Κοινός παράγοντας

1. $15ax - 30ay - 10a\omega$
2. $axy^2 + ax^2y^3 - ax^3\omega^2$
3. $6axy^2 + 12ax^2y^3 - 18ax^3y^2$
4. $-\alpha^3\beta^2\gamma^4x^3 - \alpha^2\beta^3\gamma^3x^4 + \alpha^3\beta^4\gamma^2x^2y^2$

2^η περίπτωση: Ομαδοποίηση

1. $\alpha x - \alpha y + \beta x - \beta y$
2. $x^3 - x^2 - x + 1$
3. $2\alpha x + 3\beta\omega + 2\alpha y + 3\beta x + 3\beta y + 2\alpha\omega$
4. $\alpha\beta + \alpha - \beta - 1$
5. $\alpha\beta x + \alpha x - \alpha\beta y - \alpha y - \beta x - x + \beta y + y$

3^η περίπτωση: ΤαυτότητεςΑ) Διαφορά τετραγώνων:

- | | | |
|------------------|------------------------------------|--------------------------|
| 1. $x^2 - 1$ | 2. $x^2 - 9$ | 3. $x^2 - 5$ |
| 4. $9x^2 - 16$ | 5. $x^4 - 81$ | 6. $3x^3 - 27x$ |
| 7. $4x^2 - 9y^2$ | 8. $x^4 - 81y^4$ | 9. $4(x+1)^2 - 9(y-2)^2$ |
| 10. $x^6 - y^6$ | 11. $16(x^2 + x + 1)^2 - 9(x+1)^4$ | 12. $(x^2 + 1)^2 - 4x^4$ |

Β) Τετράγωνο αθροίσματος ή διαφοράς δύο μονωνύμων :

- | | | |
|------------------------------|--|--|
| 1. $x^2 - 4x + 4$ | 2. $x^2 + 4xy + 4y^2$ | 3. $-3x^2 + 12x - 12$ |
| 4. $x^2 - 4x + 4 - \alpha^2$ | 5. $x^2 + 4xy + 3y^2$ | 6. $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$ |
| 7. $x^4 + x^2y^2 + y^4$ | 8. $\alpha^6 - 2\alpha^3 + 1$ | 9. $\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^3 + 9\beta^6$ |
| 10. $x^8 + x^4y^4 + y^8$ | 11. $(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + 2(\alpha + 1) + 1$ | 12. $(\alpha^2 + 2\alpha + 1) - 6(\alpha + 1)\beta + 9\beta^2$ |

Γ) Κύβος αθροίσματος ή διαφοράς δύο μονωνύμων :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ | 2. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ | 3. $x^3 - 6\alpha x^2 + 12\alpha^2 x - 8\alpha^3$ |
| 4. $27 - 27\alpha + 9\alpha^2 + \alpha^3$ | 5. $1 - 3(\alpha - 1) + 3(\alpha - 1)^2 - (\alpha - 1)^3$ | 6. $\alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta + 1$ |
| 7. | 8. | 9. |

Δ) Άθροισμα ή διαφορά κύβων :

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| 1. $x^3 - 1$ | 2. $x^3 + 8$ | 3. $8x^3 - 27$ |
| 4. $x^6 - y^6$ | 5. $x^9 - y^9$ | 6. $x^6 - y^9$ |

4^η περίπτωση: Τριώνυμο

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1. $3x^2 - 12x$ | 2. $-5x^2 + 3x$ | 3. $-3x^2 + 12$ |
| 4. $3x^2 - 12$ | 5. $-3x^2 - 12$ | 6. $3x^2 + 12$ |
| 7. $x^2 - 5x + 6$ | 8. $x^2 - 3x - 4$ | 9. $x^2 + 7x + 12$ |

10. $x^2 - 5xy + 6y^2$

11. $x^2 - 3xy - 4y^2$

12. $3x^2 + 12y^2$

13. $x^4 - 5x^2 + 4$

14. $x^4 + 3x^2 - 4$

15. $x^4 - 3x^2y^2 - 4y^4$

16. $3x^2 - 5x + 2$

17. $-2x^2 - 5x + 7$

18. $-x^2 - 5x + 6$

5^η περίπτωση: Συνδυασμός των προηγούμενων περιπτώσεων

1. $-2x^5 + 32x$

2. $x^3 - 5x^2 + 6x$

3. $\alpha^2 - x^2 - 2\alpha + 2x$

4. $x^8 - 3x^4 - 4$

5. $\alpha^2x^4 - \alpha^2y^4 + \beta^2y^4 - \beta^2x^4$

6. $\alpha^2 - x^2 - 2\alpha + 4x - 3$

7. $x^2 - 2xy + y^2 - 9\alpha^2$

8. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

9. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 8y^3$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

1. $2(4 - 3x) - 3(2 - 2x) = 0$

2. $2(4 - 3x) - 3(2 - 2x) \geq 0$

3. $2 \cdot \frac{1 - 3x}{3} - \frac{3 - x}{15} \leq x - \frac{3 \cdot (2 - x)}{5}$

4. $\frac{3 \cdot \frac{2 - 3x}{2}}{5} - \frac{2 + \frac{x - 1}{3}}{2} = 2 + x$

5. $1 - [x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{x}{3} - 3)] \leq 0$

6. $\frac{2}{x - 3} = -\frac{3}{1 - x}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

1. $2x^2 + x = 0$

2. $2x^2 - 8 = 0$

3. $2x^2 + 8 = 0$

4. $-3x^2 + 27 = 0$

5. $-x^2 - 1 = 0$

6. $-2x^2 + 8x = 0$

7. $x^2 - 5x + 4 = 0$

8. $x^2 + 3x - 4 = 0$

9. $-x^2 + 5x - 6 = 0$

10. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

11. $-3x^2 + 5x - 2 = 0$

12. $-3x^2 + 6x - 3 = 0$

13. $x^2 + x + 1 = 0$

14. $2x^4 - 32 = 0$

15. $2x^4 - 8 = 0$

$$16. \quad 8x^3 - 2x = 0 \qquad 17. \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad 18. \quad x^3 - 5x^2 + 4x = 0$$

$$19. \quad (x-2)^2(x+1) = (x^2 - x - 2)(2x+1) \qquad 20. \quad (x-2)(x+1) = x(2-x) \qquad 21. \quad x^3 - 1 = 0$$

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Άσκηση 1 : Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις

$$1. \quad \frac{3-x}{x^2-9}$$

$$2. \quad \frac{3x-x^2}{x^2-4x+3}$$

$$3. \quad \frac{3x-3y+ax-ay}{x^2-xy}$$

$$4. \quad \frac{x^3-5x^2+6x}{9x-x^3}$$

$$5. \quad \frac{x^2+4x+4}{x^3+x} \cdot \frac{x^2-x-2}{x} \cdot \frac{x^2+1}{4-x^2}$$

$$6. \quad \frac{2x-4}{x^2-y^2} \cdot \frac{3x^3-12x}{x^4-y^4}$$

$$7. \quad \frac{\frac{x^2-x}{x^3+1}}{-x^2+2x-1} \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2+x+1}$$

$$8. \quad \frac{x^2+4x+4}{x^3+x} \cdot \frac{x^2-x-2}{x} \cdot \frac{4-x^2}{x^2+1}$$

$$9. \quad \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha^3 + 1}$$

$$10. \quad \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{3x-2}{3x+3} - \frac{5}{6x^2-6}$$

$$11. \quad \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+2}{x+1} + \frac{3x}{x^2-x-2}$$

$$12. \quad \frac{3x^2-14}{x^3-5x^2+6x} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Άσκηση 2 : Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

$$1. \quad \frac{3-x}{x^2-9} = 0$$

$$2. \quad \frac{3x-x^2}{x^2-4x+3} = 0$$

$$3. \quad \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$4. \quad \frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{x}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x}$$

$$5. \quad \frac{x-2}{2x} - \frac{2}{2-x} = \frac{4}{x^2-2x}$$

$$6. \quad \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{x^3+x^2+x}$$